УДК 515.2: 681.3

Найдыш А.В.

МНОГОМЕРНАЯ НСО - АППРОКСИМАЦИЯ

При математической обработке экспериментальных данных, отягощенных погрешностями, адекватную процессу модель в некоторых случаях можно построить на основе метода НСО (наименьшего суммарного отклонения) [1].

Сформулируем простейшую задачу трехмерной НСО-аппроксимации.

Для заданного множества точек $\{x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}\}$, $i = \overline{1;n}$; построить плоскость

$$x_3 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \tag{1}$$

такую, чтобы сумма модулей отклонений

$$\Delta_i = x_{3i} - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i} - a_0 \tag{2}$$

была минимальной, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i| = min \tag{3}$$

Основные теоретические положения метода базируются на перенесении в пространство параметров (a_0, a_1, a_2).

Множеству точек $\{x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}\}$, $i = \overline{1;n}$; пространства $\{x_1, x_2, x_3\}$ соответствует в пространстве (a_0, a_1, a_2) пучок Π плоскостей, с которым связано решение поставленной задачи.

Теорема 1. Точка решения в пространстве (a_0, a_1, a_2) принадлежит некоторому узлу или ребру медианного пространства (медианного многогранника).

Теорема 2. Плоскость решения в пространстве $\{x_1, x_2, x_3\}$ инцидентна трем точкам заданного множества $\{x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}\}$ $i = \overline{1;n}$.

Теорема 3. График зависимости $\sum |\Delta_i|$ от a_1 и a_2 представляет собой выпуклый вниз многогранник T, узлы которого являются конкурирующими точками с узлами медианного пространства (многогранника) по отношению к плоскости (a_1, a_2).

Способ решения заключается в последовательной НСО-аппроксимации. Вначале определяется решение $a_1 = a'_1, a_0 = a'_0$ в плоскоскости $a_2 = 0$ для множества точек $\{x_{1i}, x_{3i}\}$, $i = \overline{1;n}$.

Из полученной точки (a'_0, a'_1) по ребрам многогранника T осуществляется движение в пространстве (a_0, a_1, a_2) до достижения наименьшей его точки (множества точек) по отношению к плоскости (a_1, a_2). В полученном трехмерном решении (a''_0, a''_1, a''_2) окончательные значения $a''_0 \neq a'_0$, $a''_1 \neq a'_1$, $a''_2 \neq a'_2$. В вычислительном плане движение осуществляется так. Пусть в результате решения двумерной задачи [2] найдена НСО-прямая на плоскости $\{x_1, x_3\}$ для точек $\{x_{1i}, x_{3i}\}$. Пусть для определенности она соединяет точки $\{x_{1j}, x_{3j}\}$ и $\{x_{1k}, x_{3k}\}$. Двигаясь вдоль ребра $(j-k)$ находим вершину P, ближайшую к $(a'_0, 0, a'_2)$. Для этого определяем значения $a_{2i}, i = \overline{1;n}, i \neq j,k$.

$$a_{2i} = \frac{D_{2i}}{D_i}; \quad D_{2i} = \begin{vmatrix} x_{1j} & x_{3j} & 1 \\ x_{1k} & x_{3k} & 1 \\ x_{1i} & x_{3i} & 1 \end{vmatrix}; \quad D_i = \begin{vmatrix} x_{1j} & x_{2j} & 1 \\ x_{1k} & x_{2k} & 1 \\ x_{1i} & x_{2i} & 1 \end{vmatrix};$$

Среди всех a_{2i} выбираем ближайшее к предыдущему $(a_2 = 0)$, т.е. наименьшее $a_{2p} > 0$.

Определяем a_{0p} и a_{1p}.

$$a_{1p} = \frac{D_{1p}}{D_p}; \quad D_{1p} = \begin{vmatrix} x_{3j} & x_{2j} & 1 \\ x_{3k} & x_{2k} & 1 \\ x_{3i} & x_{2i} & 1 \end{vmatrix}; \quad D_i = \begin{vmatrix} x_{1j} & x_{2j} & x_{3j} \\ x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \end{vmatrix};$$

$$a_{0p} = \frac{D_{0p}}{D_p}; \quad D_p = D_i \Big|_{i=p}$$

Рассчитываем Δ_p согласно (2) при $i = p$ и $\sum |\Delta_i|_p = \sum_p$.

Аналогично осуществляется движение в направлении $a_{2i} < 0$, расчет $\sum |\Delta_i|$, среди которых выбирается минимальное, являющееся решением.

Выше изложенное позволяет провести обобщения, и продолжить процесс последовательной НСО-аппроксимации, если требуется построить гиперплоскость 4-пространства, аппроксимирующую множество точек $\{x_{1i}, x_{2i}, x_{3i} x_{4i}\}$ по критерию НСО. Вначале отыскивается решение 3-пространственного подмножества точек при $x_{3i} = 0$ аналогично выше описанному и из полученной точки (или множества точек) осуществляется движение в 4-пространстве $0 a_0 a_1 a_2 a_3$ в направлении оси $0 a_3$ вдоль ребер 4-пространственного гипермногогранника T до достижения его минимума по отношению к гиперплоскости $0 a_1 a_2 a_3$.

Такое движение последовательно можно выполнить для достижения НСО-решения в пространстве любого измерения.

Рассмотренное решение является основой нелинейной многопараметрической НСО-аппроксимации. Сформулируем простейшую задачу. Для заданного множества точек $\{x_i; y_i\}, i = \overline{1;n}$ на плоскости построить аппроксимирующую параболу

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (4)$$

по критерию НСО. Очевидно, что, осуществив подстановку $y = x_3, x = x_1$, $x^2 = x_2$, задача приводится к ранее рассмотренному случаю линейной аппроксимации 3-плоскостью (1).

Повышение степени параболы соответствует увеличению размерности пространства параметров.

Очевидно, что в качестве аппроксимирующих функций могут выступать тригонометрические, показательные (экспоненциальные) полиномы или другие функции, линейные относительно своих коэффициентов.

В качестве примера в таблице приведены результаты решения НСО-задачи для заданных 12 точек. На первом шаге определяется НСО-прямая $y = 45x + 0.3435x$, инцидентная точкам 2 и 8. Следующий шаг аппроксимации приводит к НСО-параболе $y = 52.3032 + 0.825859x + +0.0012852x^2$, определяемой точками 1, 4 и 9. Как видим, точки исходного массива, определяющие НСО-решение на первом шаге (прямая линия), не входят в состав точек второго шага (2-парабола).

№ п/п	x	y	Отклонения от НСО-прямой	Отклонения от НСО-параболы
1	-480	-48	71,8696	0
2	-230	-34	0	35,6574
3	-130	-24	-24,3478	9,3382
4	-84	-8	-24,1478	0
5	-41	9	-21,9174	-11,6042
6	-21	23	-14,7869	-12,5278
7	-6	32	-10,9391	-15,3953
8	0	45	0	-7,3042
9	12,7	63	13,6378	0
10	31	97	41,3522	17,8589
11	49	134	72,1695	38,14266
12	73,5	189	118,7543	69,0517
Сумма модулей отклонений			413,9226	216,8804

Перечень ссылок

1. Найдиш А.В. Геометричне обгрунтування методу найменших сумарних відхилень (НСВ) // Приклад. геом. та інж. граф. - К.: КДТУБА, вип. 61. - 1997. -С. 128- 131.